ĐƠN ĐIỆU

CÁC BƯỚC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Tìm tập xác định
2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định
3. Lập bảng biến thiên
4. Kết luận

TÌM THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$

Trên $\mathbb{R}$

- **Đồng biến**: $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- **Nghịch biến**: $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Đơn điệu trên khoảng $(x_1; x_2)$ sao cho $|x_2 - x_1| = \ell$

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ |x_1 - x_2| = \ell \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ \dfrac{\sqrt{\Delta_{y'}}}{|a|} = \ell \end{cases}$$

Trên khoảng $E \subset \mathbb{R}$

- **Phương pháp hàm số** (cô lập tham số)
  1. Phân tích $m = g(x)$
  2. Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên E
  3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận

Cô lập được tham số m trong y':

Hàm số đồng biến trên $(a; b)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in [a; b] \overset{\text{cô lập tham số } m}{\longleftrightarrow} g(x) \geq k(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow k(m) \leq \min\limits_{[a;b]} g(x)$

Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in [a; b] \overset{\text{cô lập tham số } m}{\longleftrightarrow} g(x) \leq k(m), \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow k(m) \geq \max\limits_{[a;b]} g(x)$

Nếu $g(x) = a\sin u(x) + b\cos u(x)$ thì:

$$\boxed{\max_{\mathbb{R}} g(x) = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\boxed{\min_{\mathbb{R}} g(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- **Phương pháp tam thức bậc 2**
  1. $\Delta \leq 0$:
     - $a > 0$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
     - $a < 0$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
  2. $\Delta > 0$:
     - $x_1 < a < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - a)(x_2 - a) < 0$
     - $x_2 > x_1 > a \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - a)(x_1 - a) > 0 \\ (x_2 - a) + (x_1 - a) > 0 \end{cases}$
     - $x_1 < x_2 < a \Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - a)(x_1 - a) > 0 \\ (x_2 - a) + (x_1 - a) < 0 \end{cases}$

$y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0)$

Trên từng khoảng xác định

- Đồng biến khi $ad - bc > 0$
- Nghịch biến khi $ad - bc < 0$

Trên khoảng $E \subset \mathbb{R}$

- Đồng biến khi $\begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin E \end{cases}$
- Nghịch biến khi $\begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\dfrac{d}{c} \notin E \end{cases}$

Hàm hợp $y = f(u(x))$ đồng biến, nghịch biến trên $(a; b)$

Đặt t=$u(x)$

- $u(x)$ đồng biến: Giữ nguyên chiều biến thiên của hàm số ban đầu cho $f(t)$ trên khoảng tương ứng.
- $u(x)$ nghịch biến: Đảo chiều biến thiên của hàm số ban đầu cho $f(t)$ trên khoảng tương ứng.

CỰC TRỊ HÀM SỐ

ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI x_0

$y'(x_0) = 0$ → Thử lại

CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- Tìm tập xác định của hàm số
- Tính $f'(x)$
- Tìm những điểm x_i tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định
- Xét dấu $f'(x)$
- Tính $f''(x_i)$
  - $f''(x_i) = 0$ → Xét dấu $f'(x)$
  - $f''(x_i) < 0$ → x_i cực đại
  - $f''(x_i) > 0$ → x_i cực tiểu

ĐỊNH THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ n CỰC TRỊ

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$

- Không có cực trị: $\Delta_{y'} \leq 0$ ⇔ $b^2 - 3ac \leq 0$
- 2 cực trị: $\Delta_{y'} > 0$ ⇔ $b^2 - 3ac > 0$
  - PTĐT qua 2 điểm cực trị
    - Cách 1: Viết PTĐT qua hai điểm cực trị A, B
    - Cách 2: PT $y = Ax + B$ với $y(x) = (mx + n)\,y'(x) + Ax + B$
    - Cách 3: (Dùng MTCT – CALC 100) $g(x) = y - \dfrac{y'.y''}{3y'''}$
    - Cách 4. $g(x) = \left(\dfrac{2c}{3} - \dfrac{2b^2}{9a}\right)x + d - \dfrac{bc}{9a}$

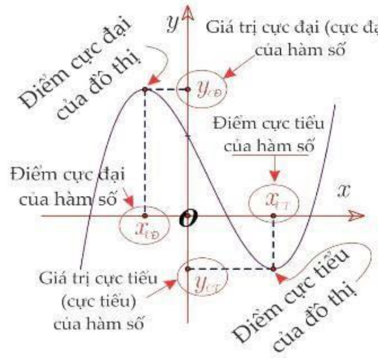
$y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$

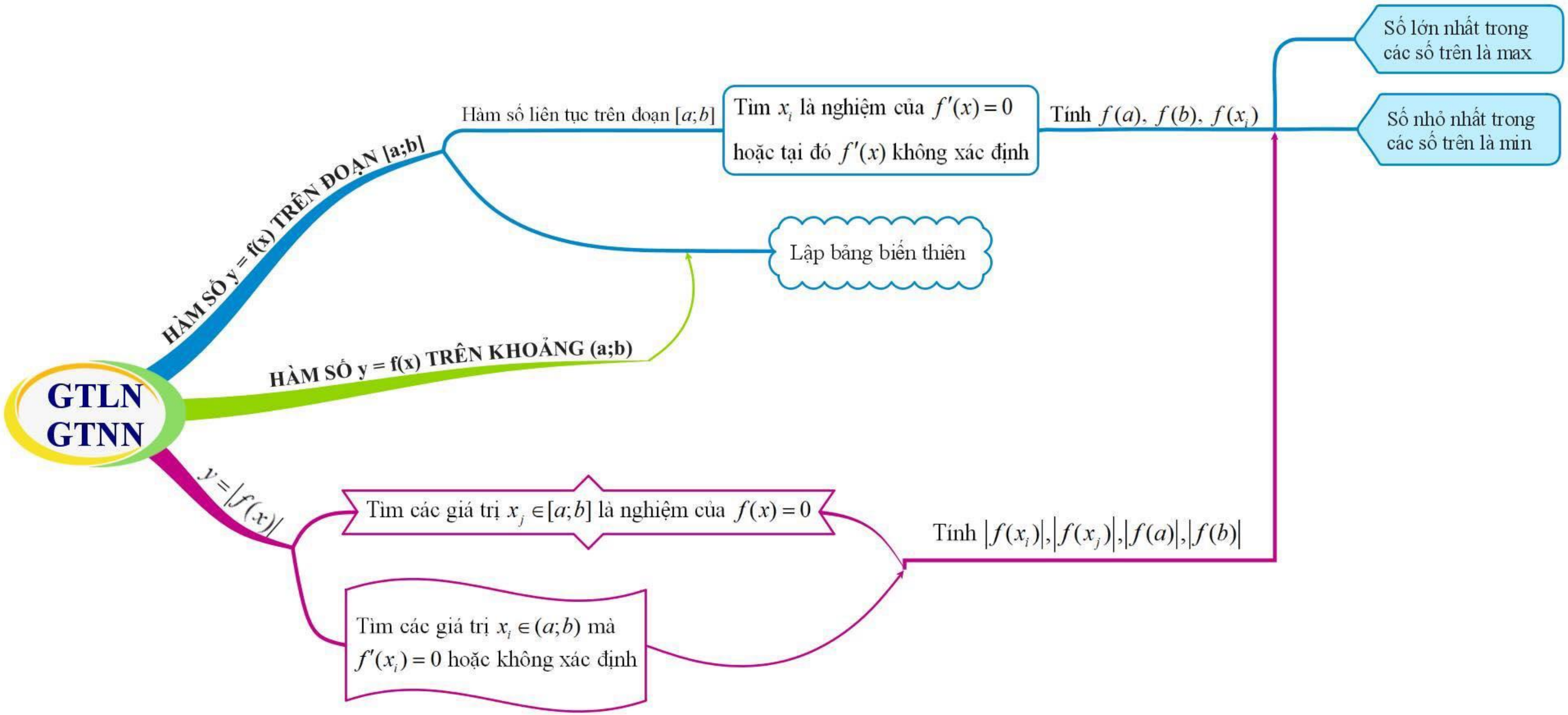
- 1 cực trị $ab \geq 0$
  - cực đại: $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$
  - cực tiểu: $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$
- 3 cực trị $ab < 0$
  - 2 cực đại, 1 cực tiểu: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$
  - 2 cực tiểu, 1 cực đại: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$
  - diện tích tam giác: $32a^3S^2 + b^5 = 0$
  - bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác: $R = \dfrac{b^3 - 8a}{8|a|b}$
  - tam giác cân, góc đỉnh φ: $\cos\varphi = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$
  - tam giác đều: $24a + b^3 = 0$
  - tam giác vuông cân: $8a + b^3 = 0$

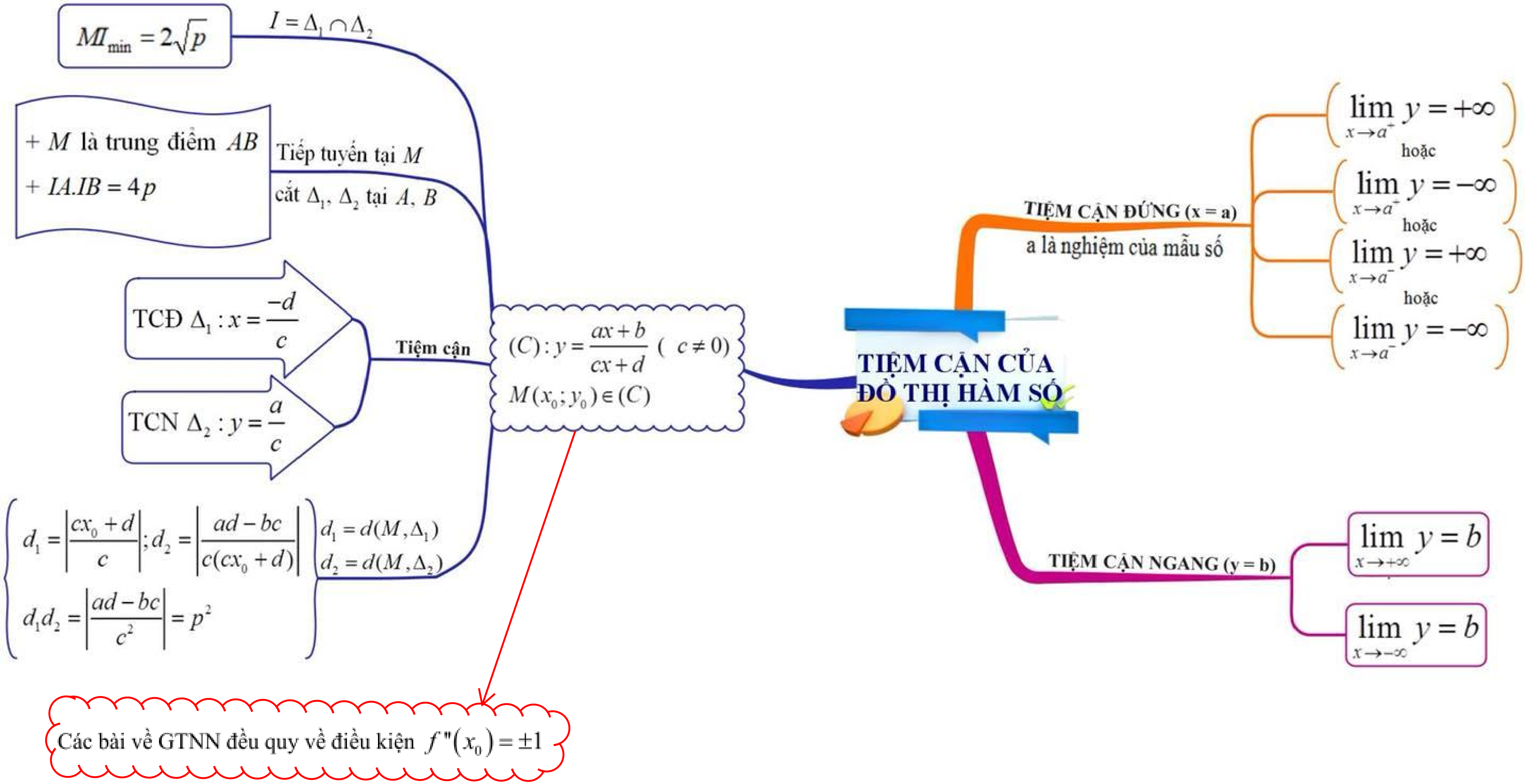
Bảng biến thiên

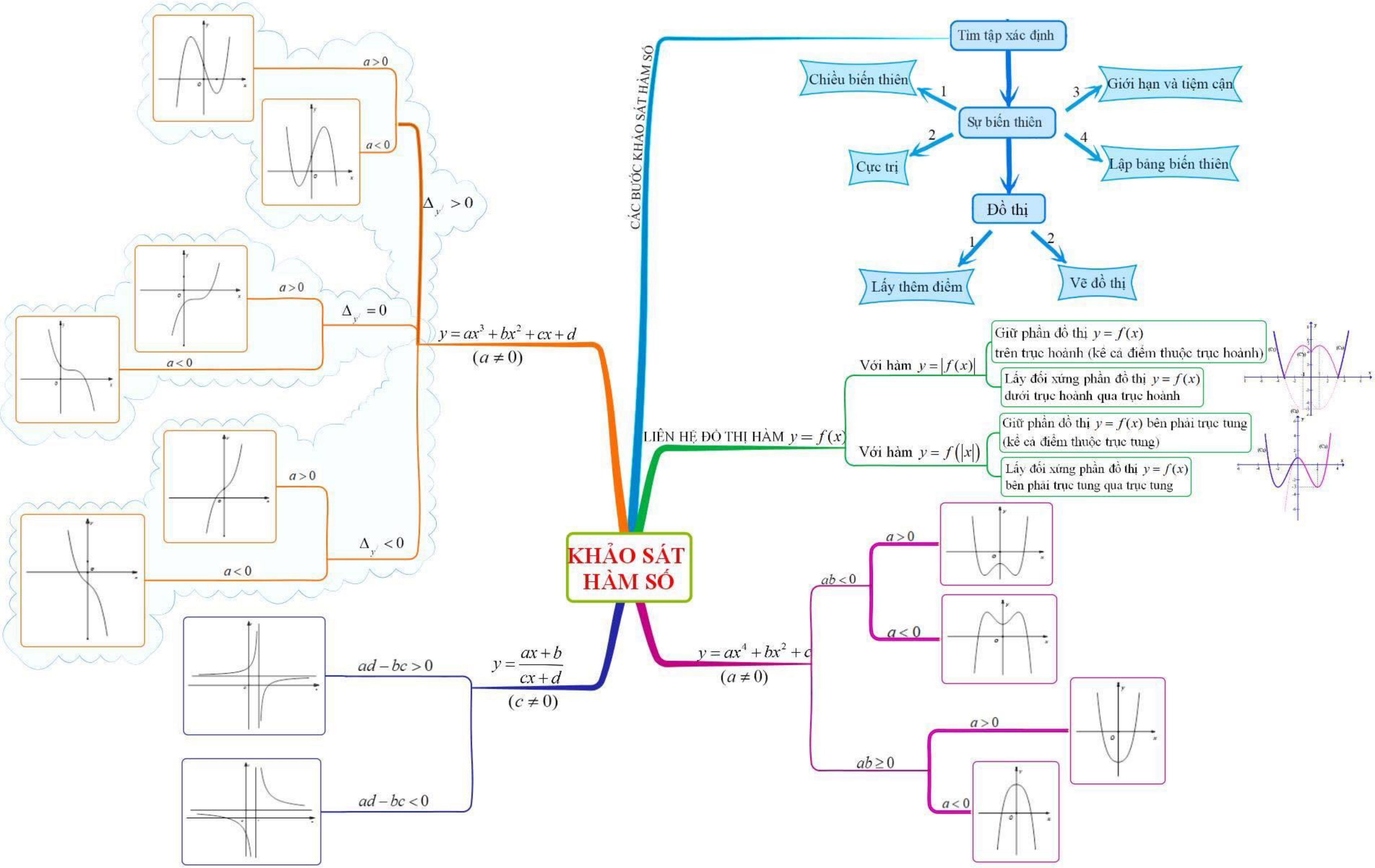
x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	f_{CT}	↗

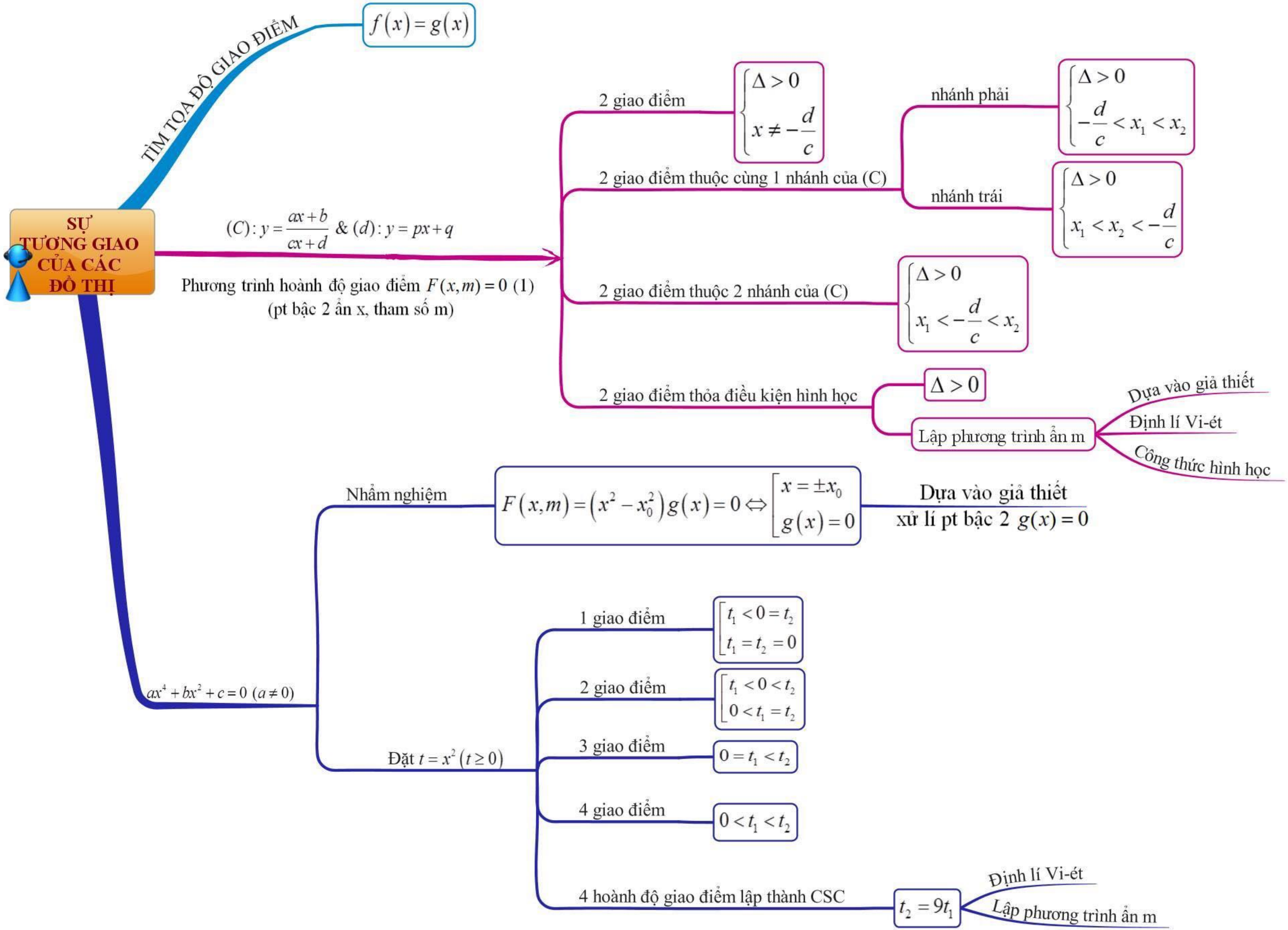
x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗	$f_{CĐ}$	↘




GTLN
GTNN
HÀM SỐ y = f(x) TRÊN ĐOẠN [a;b]
Hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$
Tìm x_i là nghiệm của $f'(x)=0$ hoặc tại đó $f'(x)$ không xác định
Tính $f(a),\ f(b),\ f(x_i)$
Số lớn nhất trong các số trên là max
Số nhỏ nhất trong các số trên là min
Lập bảng biến thiên
HÀM SỐ y = f(x) TRÊN KHOẢNG (a;b)
$y=|f(x)|$
Tìm các giá trị $x_j \in [a;b]$ là nghiệm của $f(x)=0$
Tìm các giá trị $x_i \in (a;b)$ mà $f'(x_i)=0$ hoặc không xác định
Tính $|f(x_i)|, |f(x_j)|, |f(a)|, |f(b)|$


TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ
TIỆM CẬN ĐỨNG (x = a)
a là nghiệm của mẫu số
$\lim\limits_{x\to a^+} y = +\infty$
hoặc
$\lim\limits_{x\to a^+} y = -\infty$
hoặc
$\lim\limits_{x\to a^-} y = +\infty$
hoặc
$\lim\limits_{x\to a^-} y = -\infty$
TIỆM CẬN NGANG (y = b)
$\lim\limits_{x\to +\infty} y = b$
$\lim\limits_{x\to -\infty} y = b$
$(C): y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$
$M(x_0; y_0) \in (C)$
Tiệm cận
TCĐ $\Delta_1 : x = \dfrac{-d}{c}$
TCN $\Delta_2 : y = \dfrac{a}{c}$
$I = \Delta_1 \cap \Delta_2$
$MI_{\min} = 2\sqrt{p}$
Tiếp tuyến tại M
cắt Δ_1, Δ_2 tại A, B
$+ M$ là trung điểm AB
$+ IA.IB = 4p$
$d_1 = d(M, \Delta_1)$
$d_2 = d(M, \Delta_2)$
$d_1 = \left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|; d_2 = \left|\dfrac{ad-bc}{c(cx_0+d)}\right|$
$d_1 d_2 = \left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right| = p^2$
Các bài về GTNN đều quy về điều kiện $f''(x_0) = \pm 1$


KHẢO SÁT HÀM SỐ
CÁC BƯỚC KHẢO SÁT HÀM SỐ
Tìm tập xác định
Sự biến thiên
1 Chiều biến thiên
2 Cực trị
3 Giới hạn và tiệm cận
4 Lập bảng biến thiên
Đồ thị
1 Lấy thêm điểm
2 Vẽ đồ thị
LIÊN HỆ ĐỒ THỊ HÀM $y = f(x)$
Với hàm $y = |f(x)|$
Giữ phần đồ thị $y = f(x)$ trên trục hoành (kể cả điểm thuộc trục hoành)
Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ dưới trục hoành qua trục hoành
Với hàm $y = f(|x|)$
Giữ phần đồ thị $y = f(x)$ bên phải trục tung (kể cả điểm thuộc trục tung)
Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ bên phải trục tung qua trục tung
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$
$\Delta_{y'} > 0$
$a > 0$
$a < 0$
$\Delta_{y'} = 0$
$a > 0$
$a < 0$
$\Delta_{y'} < 0$
$a > 0$
$a < 0$
$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0)$
$ad - bc > 0$
$ad - bc < 0$
$y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$
$ab < 0$
$a > 0$
$a < 0$
$ab \geq 0$
$a > 0$
$a < 0$


SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CÁC ĐỒ THỊ
TÌM TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM
$f(x) = g(x)$
$(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$ & $(d): y = px + q$
Phương trình hoành độ giao điểm $F(x,m) = 0$ (1)
(pt bậc 2 ẩn x, tham số m)
2 giao điểm
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -\frac{d}{c} \end{cases}$
2 giao điểm thuộc cùng 1 nhánh của (C)
nhánh phải
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{d}{c} < x_1 < x_2 \end{cases}$
nhánh trái
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 < -\frac{d}{c} \end{cases}$
2 giao điểm thuộc 2 nhánh của (C)
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < -\frac{d}{c} < x_2 \end{cases}$
2 giao điểm thỏa điều kiện hình học
$\Delta > 0$
Lập phương trình ẩn m
Dựa vào giả thiết
Định lí Vi-ét
Công thức hình học
$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0)$
Nhẩm nghiệm
$F(x,m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.$
Dựa vào giả thiết
xử lí pt bậc 2 $g(x) = 0$
Đặt $t = x^2 \ (t \geq 0)$
1 giao điểm
$\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{array}\right.$
2 giao điểm
$\left[\begin{array}{l} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{array}\right.$
3 giao điểm
$0 = t_1 < t_2$
4 giao điểm
$0 < t_1 < t_2$
4 hoành độ giao điểm lập thành CSC
$t_2 = 9t_1$
Định lí Vi-ét
Lập phương trình ẩn m

TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM BẬC 3

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

- **PHƯƠNG PHÁP**
  - Sử dụng bảng biến thiên / đồ thị
    - Phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x) = 0$
    - Cô lập m: $m = f(x)$
    - Lập bảng biến thiên của $f(x)$
    - Dựa vào bảng biến thiên để kết luận
  - Nhẩm nghiệm
    - Pt hoành độ giao điểm $F(x) = 0$
    - Nhẩm nghiệm: $\boxed{F(x) = 0 \Leftrightarrow (x - x_0).g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_0 \\ g(x) = 0 \end{array}\right.}$
    - Dựa vào yêu cầu đề bài tìm điều kiện của pt bậc 2 $g(x) = 0$
  - Cực trị
    - $\boxed{\text{PTHĐGĐ } F(x) = 0}$ — Xét hàm số $y = F(x)$
      - 1 giao điểm
        - $\boxed{\Delta_{y'} \leq 0}$
        - $\boxed{\Delta_{y'} > 0}$, $\boxed{y_{cd} . y_{ct} > 0}$
      - 2 giao điểm
        - $\boxed{\Delta_{y'} > 0}$
        - $\boxed{y_{cd} . y_{ct} = 0}$
      - 3 giao điểm
        - $\boxed{\Delta_{y'} > 0}$
        - $\boxed{y_{cd} . y_{ct} < 0}$
- **HÀM BẬC 3 CẮT TRỤC HOÀNH TẠI 3 ĐIỂM LẬP THÀNH CẤP SỐ CỘNG**
  - $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ là 1 nghiệm của phương trình $y = 0$
  - Thử lại

TIẾP TUYẾN CỦA ĐTHS

HỆ SỐ GÓC k CHO TRƯỚC

- Giả sử $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm. Khi đó x_0 thỏa mãn: $f'\left(x_0\right) = k\ (*)$
- Giải (*) tìm x_0. Suy ra $y_0 = f\left(x_0\right)$

$d_1 : y = k_1x + b_1$

$d_2 : y = k_2x + b_2$

- $d_1 \parallel d_2$: $\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$
- $d_1 \perp d_2$: $k_1k_2 = -1$

TIẾP TUYẾN TẠI ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ $M\left(x_0; y_0\right)$

- Tính $f'\left(x\right)$. Hệ số góc là $f'\left(x_0\right)$
- Pt tiếp tuyến tại M là: $y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + y_0$

TIẾP TUYẾN ĐI QUA ĐIỂM $A(a;b)$

- Giả sử $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm
- Tính y'. Pt tiếp tuyến là: $y = f'(x_0)\left(x - x_0\right) + y_0$
- $A\left(a;b\right)$ thuộc tiếp tuyến $\Rightarrow b = f'(x_0)\left(a - x_0\right) + y_0$ (*)
- Giải (*) tìm được x_0, suy ra pt tiếp tuyến

MŨ LŨY THỪA LOGARIT

LOGARIT

$\log_a 1 = 0 (0 < a \neq 1)$	$\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta}.\log_a b$
$\log_a a = 1 (0<a \neq 1)$	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b.c)$
$\log_a a^\alpha = \alpha (0<a \neq 1)$	$\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$
$\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha} (0<a \neq 1)$	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
$\log_a b^\alpha = \alpha.\log_a b$; $(a,b>0, a\neq 1)$	
$\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}.\log_a b$	

LŨY THỪA

Số mũ α	Cơ số a	Luỹ thừa a^α
$\alpha = n \in N^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a......a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n (n \in N^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} (m \in Z, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n \ (r_n \in Q, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán tăng trưởng dân số

$$X_m = X_n (1+r)^{m-n}$$

$$X_m = X_n . e^{(m-n)r}$$

Bài toán lãi suất

Lãi đơn

$$T_n = A(1+nr)$$

Lãi kép

Gửi 1 lần

$$T_n = A(1+r)^n$$

Gửi định kì

$$T_n = \frac{A}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Trả góp

Sau n tháng, còn nợ: $T_n = A(1+r)^n - x\frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Để sau m tháng hết nợ, mỗi tháng trả $x = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$

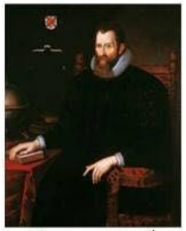
GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

LIMIT

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$



John Napier

HÀM SỐ MŨ LŨY THỪA - LOGARIT

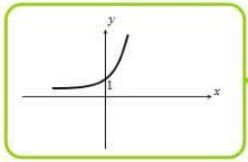
HÀM SỐ MŨ

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

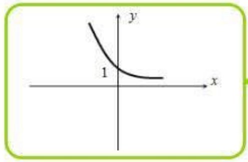
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$
- Đồ thị

  Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang

  - $a > 1$



  - $0 < a < 1$



ĐẠO HÀM

$(a^x)' = a^x \ln a$	$\left[a^{u(x)}\right]' = u'(x).a^{u(x)} \ln a$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$\left[u^\alpha(x)\right]' = \alpha.u^{\alpha-1}(x).u'(x)$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$[\log_a u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x).\ln a}$

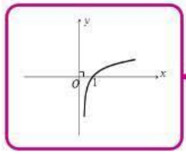
HÀM SỐ LOGARIT

$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

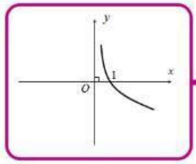
- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$
- Đồ thị

  Nhận trục tung làm tiệm cận đứng

  - $a > 1$



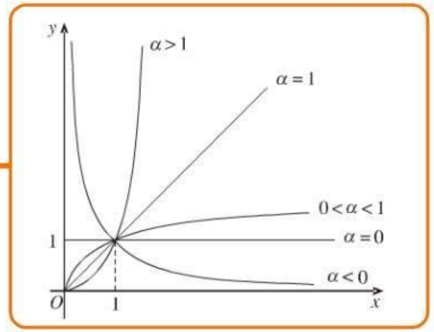
  - $0 < a < 1$

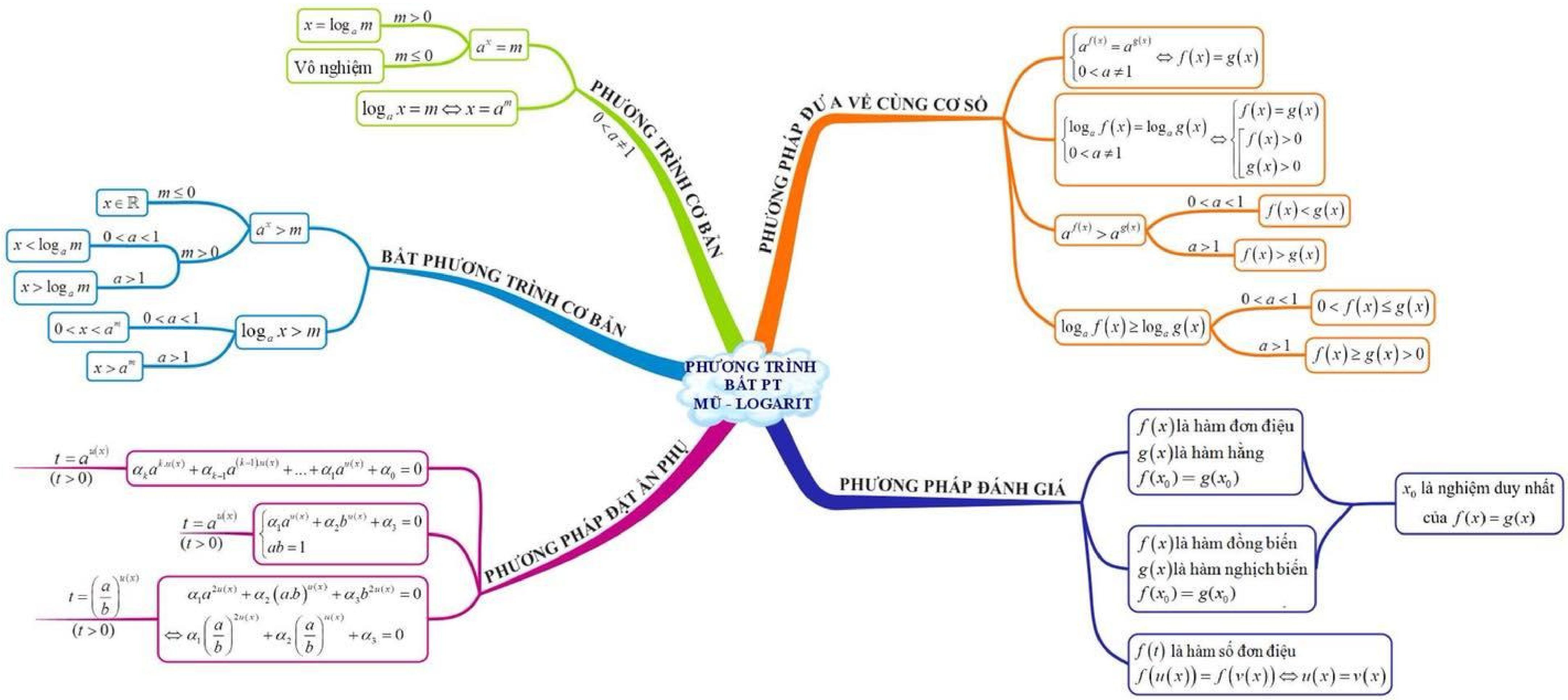


HÀM SỐ LŨY THỪA

$y = x^\alpha$

- Tập xác định
  - $\alpha \in \mathbb{Z}^+$: $D = \mathbb{R}$
  - $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ hoặc $\alpha = 0$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
  - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: $D = (0; +\infty)$
- Đồ thị




PHƯƠNG TRÌNH BẤT PT MŨ - LOGARIT
PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN
$0 < a \neq 1$
$a^x = m$
$m > 0$
$x = \log_a m$
$m \leq 0$
Vô nghiệm
$\log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$
BẤT PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN
$a^x > m$
$m \leq 0$
$x \in \mathbb{R}$
$m > 0$
$0 < a < 1$
$x < \log_a m$
$a > 1$
$x > \log_a m$
$\log_a x > m$
$0 < a < 1$
$0 < x < a^m$
$a > 1$
$x > a^m$
PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ
$t = a^{u(x)}$ $(t > 0)$
$\alpha_k a^{k.u(x)} + \alpha_{k-1} a^{(k-1).u(x)} + ... + \alpha_1 a^{u(x)} + \alpha_0 = 0$
$t = a^{u(x)}$ $(t > 0)$
$\begin{cases} \alpha_1 a^{u(x)} + \alpha_2 b^{u(x)} + \alpha_3 = 0 \\ ab = 1 \end{cases}$
$t = \left(\frac{a}{b}\right)^{u(x)}$ $(t > 0)$
$\alpha_1 a^{2u(x)} + \alpha_2 (a.b)^{u(x)} + \alpha_3 b^{2u(x)} = 0$
$\Leftrightarrow \alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2u(x)} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{u(x)} + \alpha_3 = 0$
PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ
$\begin{cases} a^{f(x)} = a^{g(x)} \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$\begin{cases} \log_a f(x) = \log_a g(x) \\ 0 < a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array} \right. \end{cases}$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$
$0 < a < 1$
$f(x) < g(x)$
$a > 1$
$f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$
$0 < a < 1$
$0 < f(x) \leq g(x)$
$a > 1$
$f(x) \geq g(x) > 0$
PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ
$f(x)$ là hàm đơn điệu
$g(x)$ là hàm hằng
$f(x_0) = g(x_0)$
$f(x)$ là hàm đồng biến
$g(x)$ là hàm nghịch biến
$f(x_0) = g(x_0)$
x_0 là nghiệm duy nhất của $f(x) = g(x)$
$f(t)$ là hàm số đơn điệu
$f(u(x)) = f(v(x)) \Leftrightarrow u(x) = v(x)$

TÍCH PHÂN

Bảng nguyên hàm

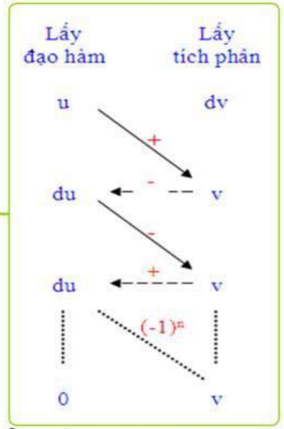
$\int k.dx = k.x + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int (ax+b)^n.dx = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int \sin x.dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \cos x.dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int(1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int(1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}e^{(ax+b)} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}.\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$

Từng phần

$$\int_a^b u.dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v.du$$

Nhất log - Nhì đa - Tam lượng - Tứ mũ

Qui tắc đường chéo



Đổi biến

Loại 1

Đặt t theo x

Dấu hiệu khi đổi biến (đặt t)

+ Gặp *căn*: đặt $t = $ *căn*

+ Gặp *ngoặc* : đặt $t = $ *biểu thức trong ngoặc*

+ Gặp *mẫu* : thường đặt $t = $ *mẫu*

+ Gặp $\ln^n x$ **đi kèm** $\frac{1}{x}dx$: đặt $t = \ln x$

(nếu có $\ln x$ **mà không có** $\frac{1}{x}$ thì *từng phần*).

+ Gặp $\tan x$ **đi kèm** $\frac{1}{\cos^2 x}$: đặt $t = \tan x$;

+ Gặp $\cot x$ **đi kèm** $\frac{1}{\sin^2 x}$: đặt $t = \cot x$.

Loại 2

Lượng giác hóa

$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$: $x = \lvert a\rvert \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\int \sqrt{a^2 + x^2}dx$, $\int \frac{1}{x^2 + a^2}dx$: $x = \lvert a\rvert \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

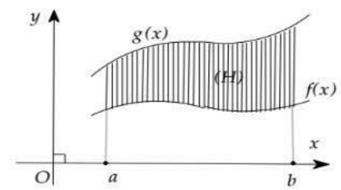
$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$: $x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t},\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

Ứng dụng

Diện tích hình H

$$S_H = \int_a^b \lvert f(x) - g(x)\rvert dx$$

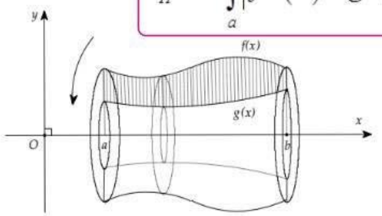
$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad (a < b)$$



Thể tích

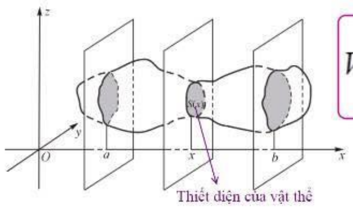
Khối tròn xoay

$$V_H = \pi\int_a^b \lvert f^2(x) - g^2(x)\rvert dx$$



Vật thể

$$V = \int_a^b S(x)dx$$



NGUYÊN HÀM TÍCH PHÂN MTCT

DẠNG 1: TÌM F(x) LÀ NGUYÊN HÀM CỦA f(x)

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right)\Big|_{x=A} - f(A)$$

Ví dụ: (Câu 23 đề thi minh họa THPT năm 2017)

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$ B. $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$ D. $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$

Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}\right)\Big|_{x=A}-\sqrt{2A-1}$ và thử các đáp án.

DẠNG 3: TÌM F(x) LÀ NGUYÊN HÀM CỦA f(x) BIẾT $F(x_0)=c$

$$F(A)-C-\int_{x_0}^{A} f(x)dx$$

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{x^2}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=-4$ là:

A. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{2}{x^2}+4$ B. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}-4$

C. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}+4$ D. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{2}{x^2}-4$

Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\left(\frac{A^2}{2}+2\ln|A|-\frac{2}{A^2}+4\right)-4-\int_1^A\frac{(x^2-1)^2}{x^2}$ và thử để chọn đáp án.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)=\frac{(x^2+1)^2}{x^2}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=-4$ là:

A. $\frac{x^2}{2}+2\ln x-\frac{2}{x^2}+4$ B. $\frac{x^2}{2}+2\ln x-\frac{1}{2x^2}-4$

C. $\frac{x^2}{2}+2\ln x-\frac{1}{2x^2}+4$ D. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-\frac{2}{x^2}-4$

DẠNG 2: TÍNH TÍCH PHÂN $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ: (Câu 25 đề thi minh họa THPT năm 2017)

Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$.

A. $I=\frac{-1}{4}\pi^4$ B. $I=-\pi^4$ C. $I=0$ D. $I=\frac{-1}{4}$

DẠNG KHÁC

Ví dụ: Biết $\int_1^2\frac{x-1}{x+3}dx=1+4\ln\frac{a}{b}(a,b\in\mathbb{Z})$ thì $2a+b$ là:

A. 0. B. 14. C.13. D. −20.

Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int_1^2\frac{x-1}{x+3}dx\to A$

Do $A=1+4\ln\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{a}{b}=e^{\frac{A-1}{4}}\Rightarrow a-e^{\frac{A-1}{4}}b=0$ nên ta dò kết quả bằng cách giải hệ phương trình

$\begin{cases}a-e^{\frac{A-1}{4}}b=0\\2a+b=k\end{cases}$ (với k lần lượt là các kết quả của bài toán).

Ví dụ: (Câu 26 đề thử nghiệm THPT năm 2017)

Biết $\int_3^4\frac{1}{x^2+x}dx=a\ln2+b\ln3+c\ln5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=6$ B. $S=2$ C. $S=-2$ D. $S=0$

Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int_3^4\frac{1}{x^2+x}dx\to A$

Do $\int_3^4\frac{1}{x^2+x}dx=A=a\ln2+b\ln3+c\ln5=\ln\left(2^a.3^b.5^c\right)\Rightarrow 2^a.3^b.5^c=e^A$ nên tiếp tục

$2^a.3^b.5^c=e^A=\frac{15}{16}=2^{-4}.3^1.5^1\Rightarrow a=-4;b=1;c=1$

Ví dụ: Giả sử hàm số $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=x(1-x)e^{-x}$

Tính tổng $T=a^2+b^2+2c^2$, ta được:

A. $T=-2$. B. $T=3$. C. $T=1$. D. $T=4$.

Nhập biểu thức vào máy tính Casio: $\int_{-1}^0 x(1-x)e^{-x}dx\to A;\int_0^1 x(1-x)e^{-x}dx\to B;\int_1^2 x(1-x)e^{-x}dx\to C$

$\int_{-1}^0 x(1-x)e^{-x}dx=f(0)-f(-1)=c-(a-b+c)e^1=A$

$\int_0^1 x(1-x)e^{-x}dx=f(1)-f(0)=(a+b+c)e^{-1}-c=B$

$\int_1^2 x(1-x)e^{-x}dx=f(2)-f(1)=(4a+2b+c)e^{-2}-(a+b+c)e^{-1}=C$

Giải hệ phương trình 3 ẩn, ta tìm được $a=1;b=1;c=1$.

(Chú ý: Giải tự luận có thể nhanh hơn)

Ví dụ: (Câu 25 đề thử nghiệm THPT năm 2017)

Cho $\int_0^4 f(x)dx=16$. Tính $I=\int_0^2 f(2x)dx$

A. $I=32$ B. $I=8$ C. $I=16$ D. $I=4$

Chọn hàm $f(x)=\frac{16}{4-0}=4$ và nhập biểu thức vào máy tính Casio: $I=\int_0^2 4dx$

TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT

TRỊ TUYỆT ĐỐI

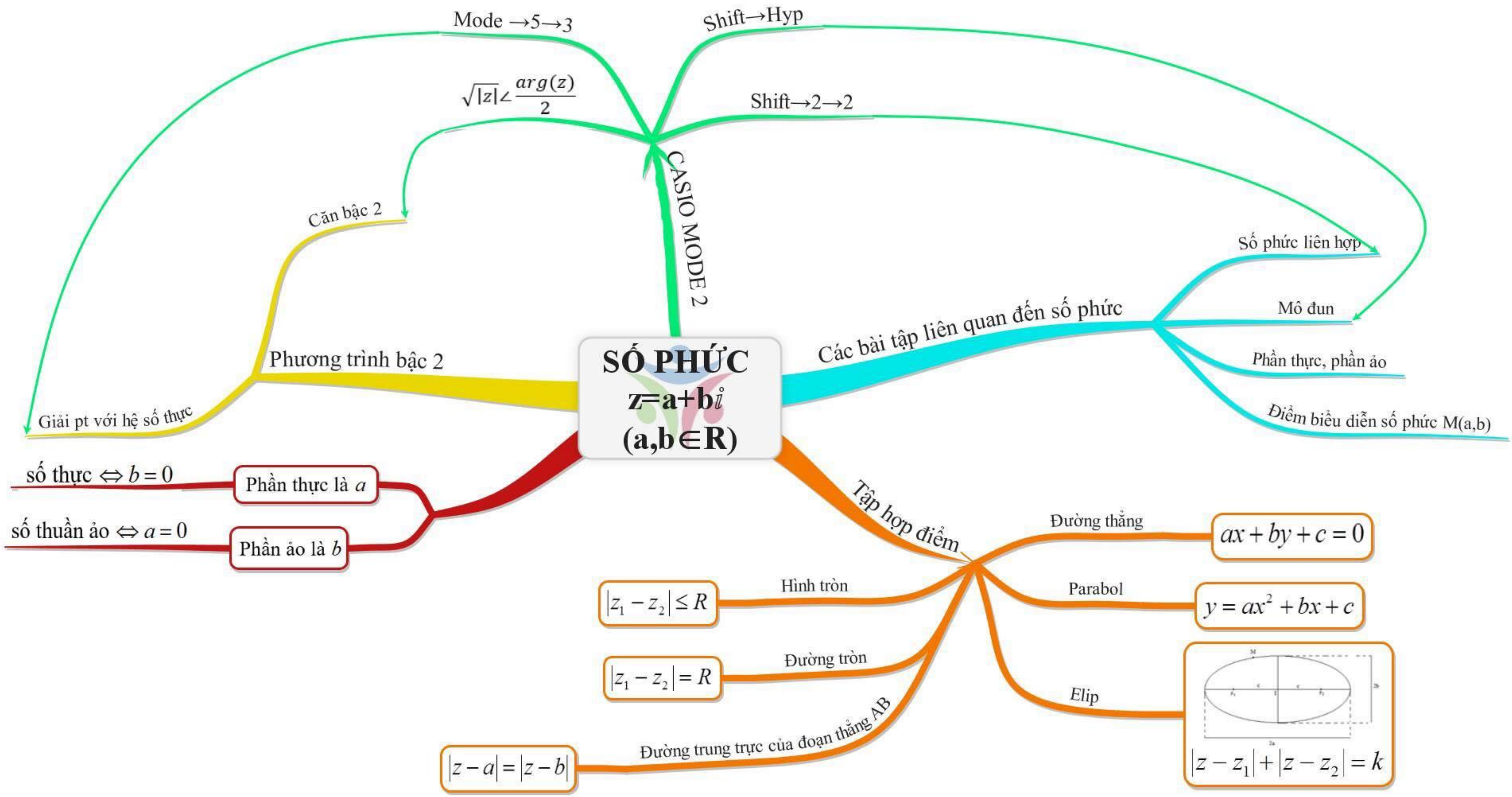
- **Các bước tính**
  - Xét dấu $f(x)$ trên $(a;b)$
    - 1. Giải pt: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_i \in (a;b)$
    - 2. Lập bảng biến thiên
  - $I=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^{x_1}|f(x)|dx+\int_{x_1}^b |f(x)|dx$
    - Chèn cận x_i
    - Bỏ dấu $|\ |$ (dựa vào bảng biến thiên)
- **Chú ý**
  - Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì $I=\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

DẠNG HỮU TỈ $I=\frac{f(x)}{g(x)}$

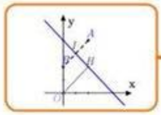
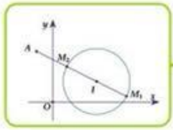
- **Bậc tử < bậc mẫu**
  - $g(x)=ax^2+bx+c$
    - $I=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c}$
      - $\Delta>0$: $I=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\beta^\alpha$
      - $\Delta=0$: $I=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta\frac{dx}{(x-x_0)^2}=-\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$
      - $\Delta<0$: $I=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta\frac{dx}{(x+m)^2+n^2}$ — Đặt $x+m=n\tan t$ — $I=\frac{1}{na}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}dt=\frac{1}{na}t\Big|_{\alpha_1}^{\beta_1}$
    - $I=\int_\alpha^\beta \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$
      - $\Delta>0$: $I=\int_\alpha^\beta\frac{C(x-x_1)+D(x-x_2)}{a(x-x_1)(x-x_2)}dx=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta\left(\frac{C}{x-x_2}+\frac{D}{x-x_1}\right)dx$
      - $\Delta=0$: $I=\int_\alpha^\beta\frac{A(x-x_0)+C}{a(x-x_0)^2}dx=\int_\alpha^\beta\left(\frac{A}{a(x-x_0)}+\frac{C}{(x-x_0)^2}\right)dx$
      - $\Delta<0$: $I=A\int_\alpha^\beta\frac{(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}dx+B\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ax^2+bx+c}$
  - $g(x)$ có bậc lớn hơn 2
    - Đổi biến
    - Tách, ghép (đồng nhất hệ số), nhân, chia
    - Đưa về 2 dạng trước
- **Bậc tử ≥ bậc mẫu**
  - $I=\int_\alpha^\beta\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int_\alpha^\beta\left[h(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\right]dx$
    - $\int_\alpha^\beta h(x)dx$: tính tích phân cơ bản
    - $\int_\alpha^\beta \frac{r(x)}{g(x)}dx$: bậc tử < bậc mẫu

ĐẶC BIỆT

- $\int_a^b f(x)dx=k \Rightarrow \int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(mx)=\frac{k}{m}$
- Với $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$: $\int_a^b f(x)dx=k \Rightarrow I=\int_a^b f(a+b-x)dx=k$
- Với $f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[a;b]$: $\int_{-a}^a f(x)dx=2.\int_0^a f(x)dx$
- Với $f(x)$ là hàm số lẻ, liên tục trên $[a;b]$: $\int_{-a}^a f(x)dx=0$
- Với $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$: $mf(-x)+nf(x)=g(x) \Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx=\frac{1}{m+n}\int_{-a}^a g(x)dx$
- Với $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, tuần hoàn với chu kì T: $\int_a^{a+T} f(x)dx=k \Rightarrow \int_0^\pi f(x)dx=k$
- Với $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $\int_a^b f(a+b-x)dx=k, \forall x\in[a;b]$: $\int_a^b x.f(x)dx=k \Rightarrow I=\int_a^b f(x)dx=\frac{2k}{a+b}$

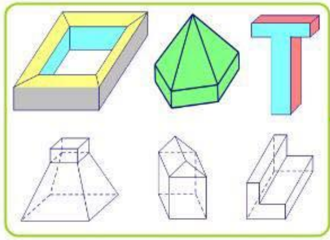

SỐ PHỨC
z=a+bi
(a,b∈R)
CASIO MODE 2
Mode →5→3
$\sqrt{|z|}\angle\frac{arg(z)}{2}$
Shift→Hyp
Shift→2→2
Phương trình bậc 2
Căn bậc 2
Giải pt với hệ số thực
Các bài tập liên quan đến số phức
Số phức liên hợp
Mô đun
Phần thực, phần ảo
Điểm biểu diễn số phức M(a,b)
Phần thực là a
Phần ảo là b
số thực $\Leftrightarrow b=0$
số thuần ảo $\Leftrightarrow a=0$
Tập hợp điểm
Đường thẳng
$ax+by+c=0$
Parabol
$y=ax^2+bx+c$
Elip
$|z-z_1|+|z-z_2|=k$
Hình tròn
$|z_1-z_2|\le R$
Đường tròn
$|z_1-z_2|=R$
Đường trung trực của đoạn thẳng AB
$|z-a|=|z-b|$

CỰC TRỊ SỐ PHỨC

- **Đường trung trực AB**: $|z-z_1|=|z-z_2|$, $A(z_1),\ B(z_2),\ M(z)$
  - 
  - $|z|_{\min}=d(O,\Delta)$ $\Leftrightarrow M\equiv H$
  - Tìm số phức z (điểm M)
    - Viết PT đường trung trực AB
    - Viết PT OH
    - M là giao của 2 đường trên
- **Đường tròn**: $|z-z_1|=R$, $P=|z-z_2|$, $I(z_1),A(z_2),M(z)$
  - 
  - $\begin{cases} P_{\min}=|AI-R| \\ P_{\max}=AI+R \end{cases}$
  - Tìm số phức z (điểm M)
    - Viết PTĐT AI
    - $AI\cap(C)=\{M_1;M_2\}$
- $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, $P=|z-z_3|$, $A(z_1),B(z_2),K(z_3)$
  - $|z_1-z_2|=2a$: **Đoạn thẳng**
    - Hình chiếu của K lên đường thẳng AB
      - thuộc đoạn AB: $P_{\max}=\max\{|z_1-z_3|;|z_2-z_3|\}$, $P_{\min}=d(K,AB)$
      - không thuộc đoạn AB: $P_{\max}=\max\{|z_1-z_3|;|z_2-z_3|\}$, $P_{\min}=\min\{|z_1-z_3|;|z_2-z_3|\}$
  - $|z_1-z_2|<2a$: **Elip**
    - $z_1=z_2=c\in R$, $z_3=0$
      - $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
      - $P_{\max}=a$, $P_{\min}=b$
    - K là tâm elip (trung điểm AB), $z_3=\dfrac{z_1+z_2}{2}$
      - $P_{\max}=a$, $P_{\min}=b$
      - $2c=|z_1-z_2|$

HÌNH ĐA DIỆN
KHỐI ĐA DIỆN

CÁC HÌNH ĐA DIỆN

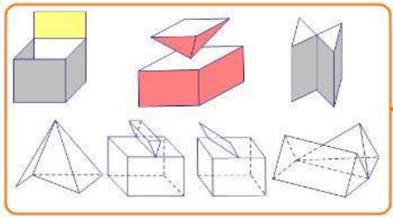


ĐỊNH NGHĨA

Là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa hai tính chất

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác

CÁC HÌNH KHÔNG LÀ ĐA DIỆN



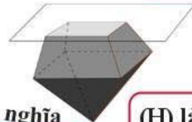
+ Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh
+ Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh

KHỐI ĐA DIỆN LỒI

Định lí Euler

Đ + M = C + 2
Đ, C, M là số đỉnh, cạnh, mặt

Định nghĩa



(H) là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của (H) luôn thuộc (H)

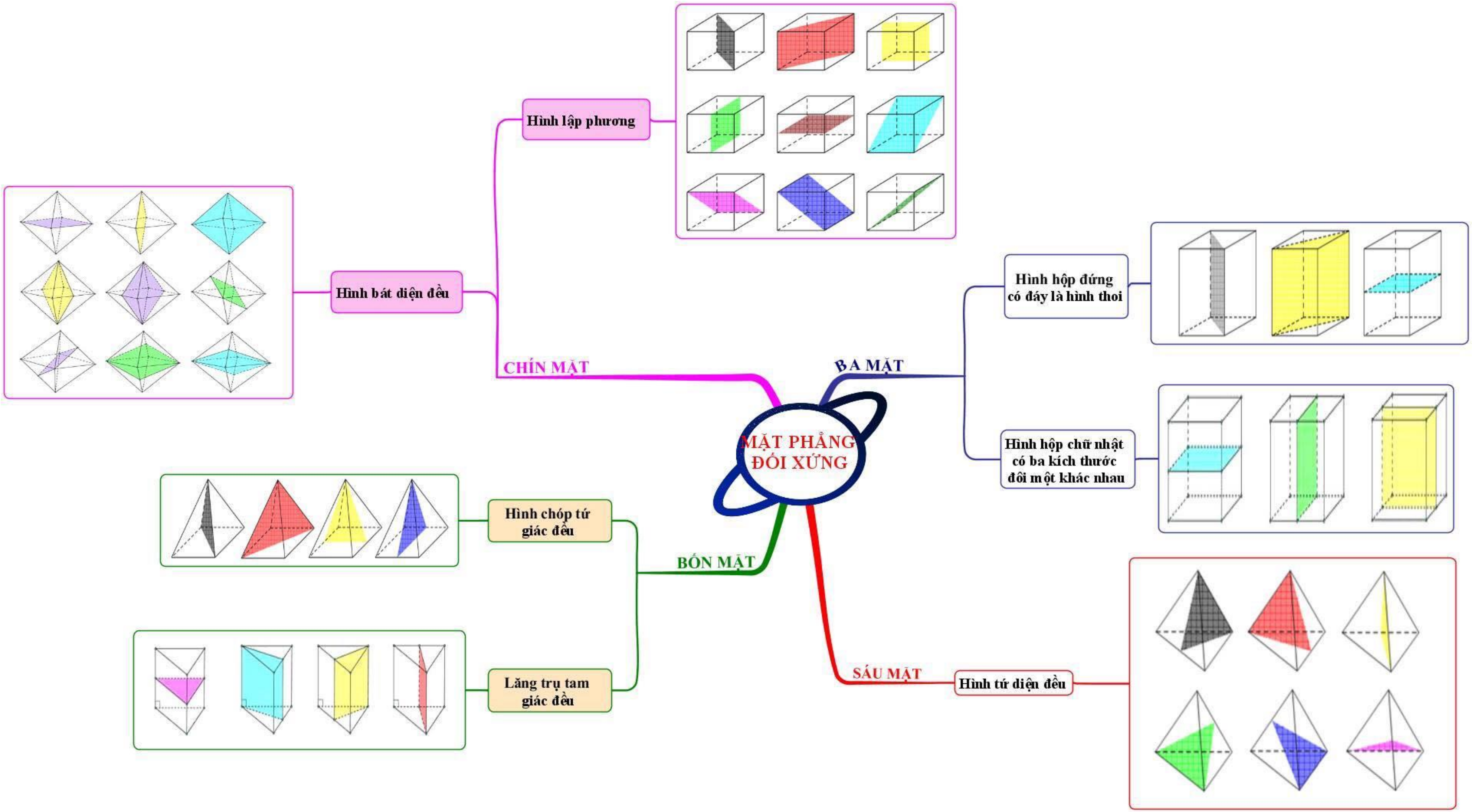
Khối đa diện đều

a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt. Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại {p,q}.

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Hình
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	6	4	
$\{4;3\}$	Lập phương	8	12	6	
$\{3;4\}$	Bát diện đều	6	12	8	
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12	
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20	

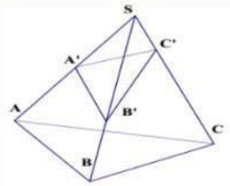
CHÚ Ý

- Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt
- Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh
- Mỗi đỉnh của một hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh
- Nếu đa diện có m mặt, mặt là đa giác p cạnh, c là số cạnh thì 2c = pm


MẶT PHẲNG ĐỐI XỨNG
CHÍN MẶT
Hình lập phương
Hình bát diện đều
BA MẶT
Hình hộp đứng có đáy là hình thoi
Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau
BỐN MẶT
Hình chóp tứ giác đều
Lăng trụ tam giác đều
SÁU MẶT
Hình tứ diện đều

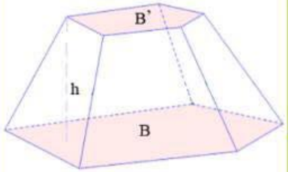
THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

TỈ SỐ THỂ TÍCH



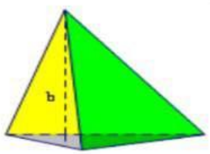
$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$$

HÌNH CHÓP CỤT



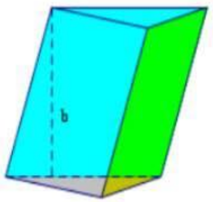
$$V=\frac{h}{3}\left(B+B'+\sqrt{B.B'}\right)$$

KHỐI CHÓP



$$V=\frac{1}{3}S_{đáy}.h$$

LĂNG TRỤ



$$V=S_{đáy}.h$$

ĐẶC BIỆT

$\begin{cases}SA=a,SB=b,SC=c\\ \widehat{ASB}=\alpha,\widehat{BSC}=\beta,\widehat{CSA}=\varphi\end{cases}$

$$V=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\varphi}$$

$\begin{cases}SA=a,S_{\Delta SAB}=S_1,S_{\Delta SAC}=S_2\\ \left((SAB),(SAC)\right)=\alpha\end{cases}$

$$V=\frac{2S_1.S_2.\sin\alpha}{3a}$$

$\begin{cases}SA=a,SB=b,SC=c\\ \left((SAB),(SAC)\right)=\alpha\\ \widehat{ASB}=\beta,\widehat{ASC}=\varphi\end{cases}$

$$V=\frac{abc}{6}\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi$$

$AB=a,CD=b$

$(AB,CD)=\alpha$

$d_{(AB,CD)}=h$

$$V=\frac{1}{6}abh\sin\alpha$$

$AB=a,BC=b,CA=c$

$CD=d,AD=e,BD=f$

$$V=\frac{1}{12}\sqrt{M+N+P-Q}$$

$$M=a^2d^2(b^2+c^2+e^2+f^2-a^2-d^2)$$

$$N=b^2e^2(a^2+c^2+d^2+f^2-b^2-e^2)$$

$$P=c^2f^2(a^2+b^2+d^2+e^2-c^2-f^2)$$

$$Q=(abc)^2+(aef)^2+(bdf)^2+(cde)^2$$

tứ diện gần đều

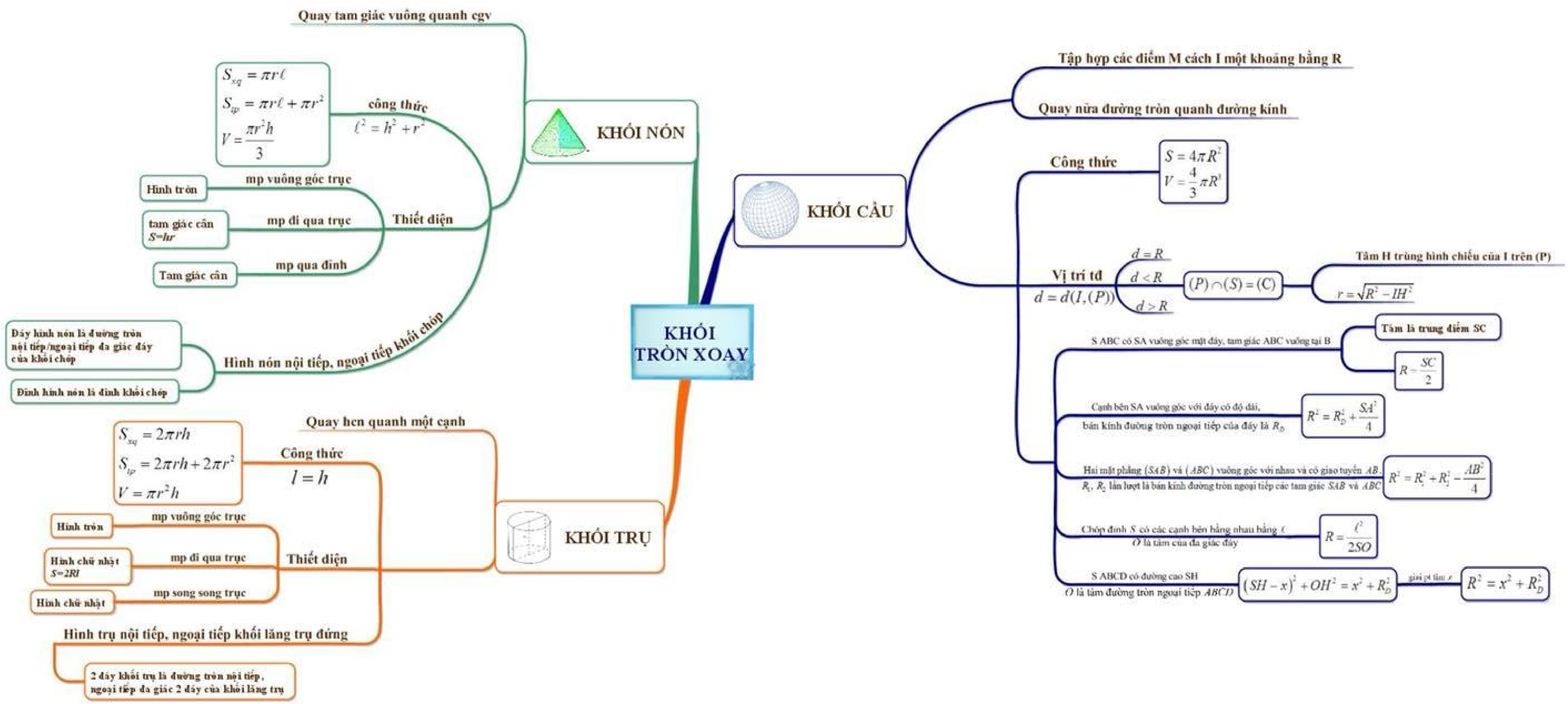
$\begin{cases}AB=CD=a\\ AC=BD=b\\ AD=BC=c\end{cases}$

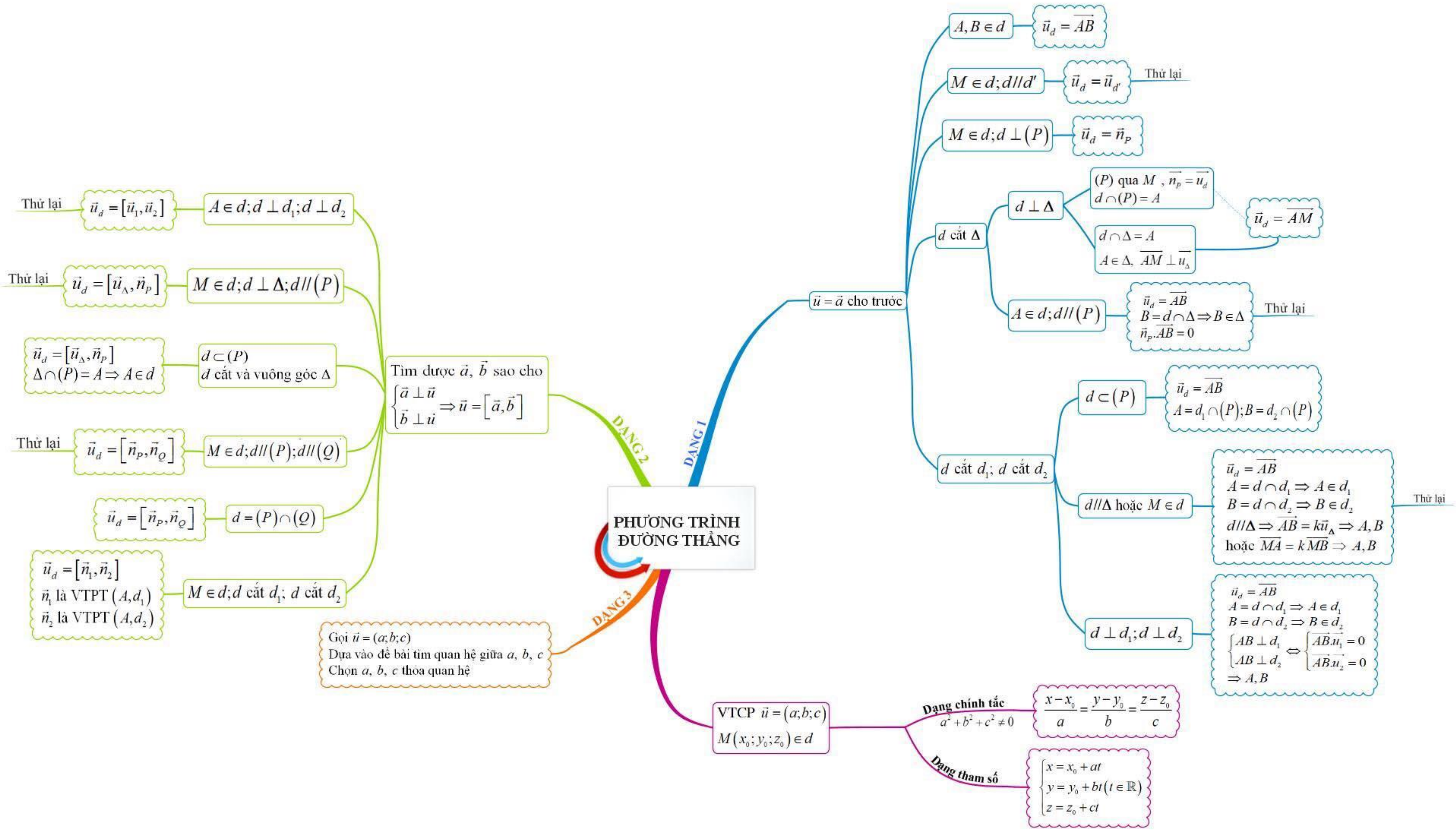
$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}$$

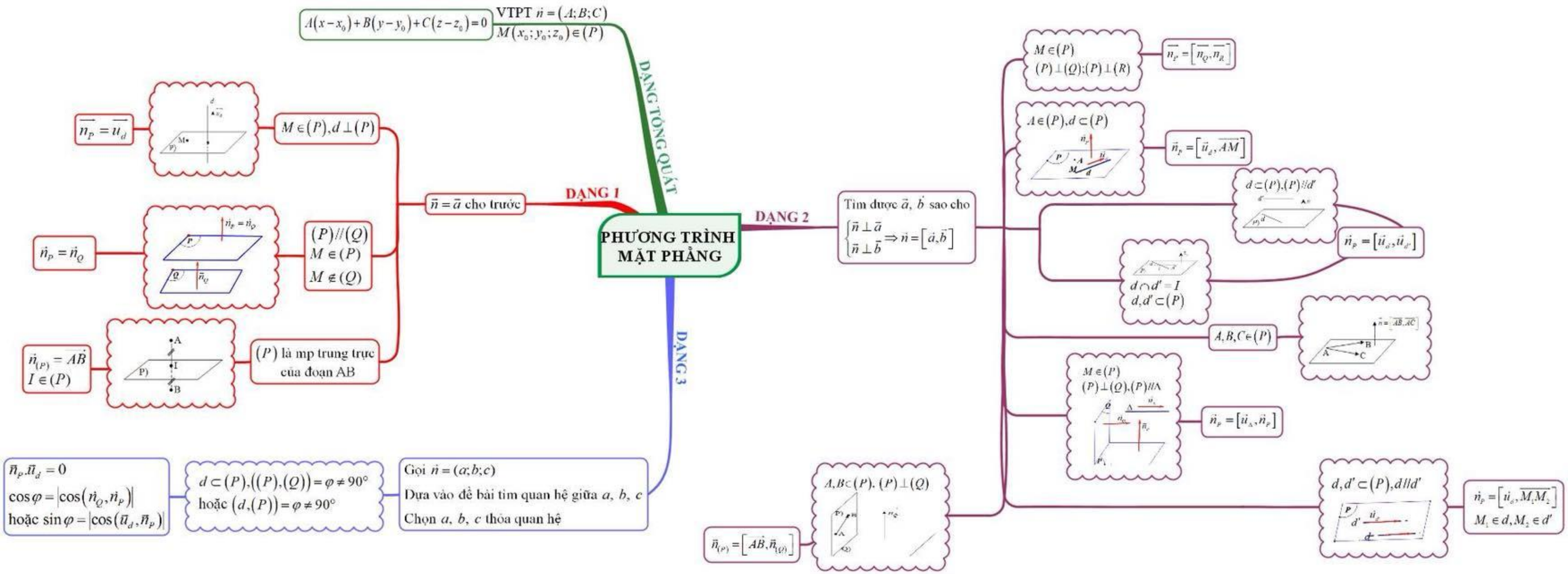
Tứ diện đều

$a=b=c$

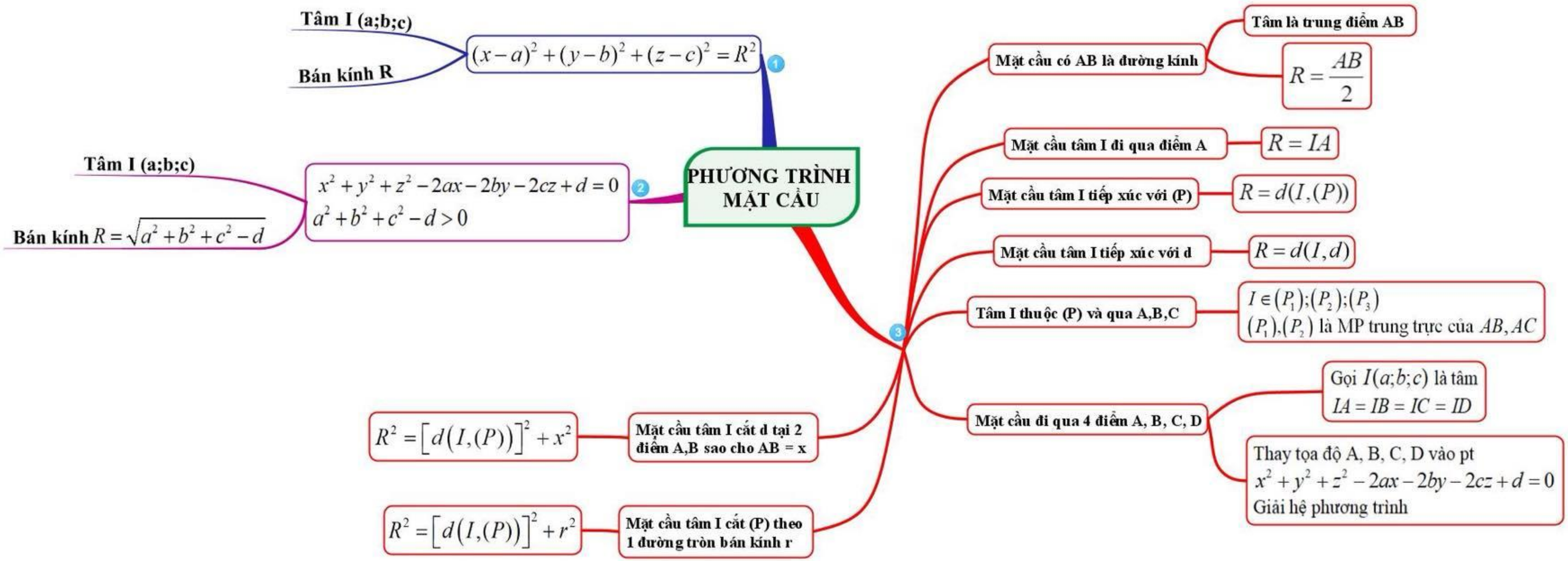
$$V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

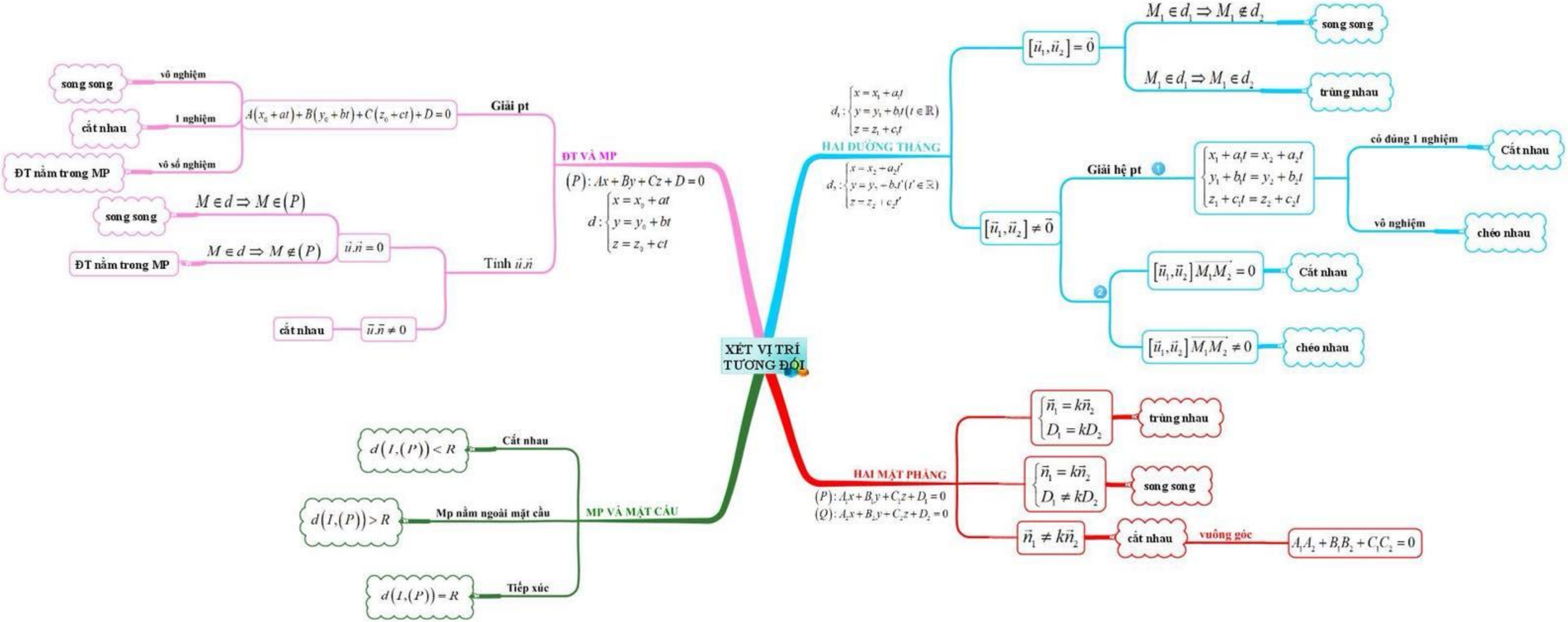

KHỐI TRÒN XOAY
KHỐI NÓN
Quay tam giác vuông quanh cgv
công thức
$S_{xq} = \pi r \ell$
$S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$
$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
$\ell^2 = h^2 + r^2$
Thiết diện
mp vuông góc trục
Hình tròn
mp đi qua trục
tam giác cân
$S = hr$
mp qua đỉnh
Tam giác cân
Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp khối chóp
Đáy hình nón là đường tròn nội tiếp/ngoại tiếp đa giác đáy của khối chóp
Đỉnh hình nón là đỉnh khối chóp
KHỐI TRỤ
Quay hcn quanh một cạnh
Công thức
$S_{xq} = 2\pi rh$
$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2$
$V = \pi r^2 h$
$l = h$
Thiết diện
mp vuông góc trục
Hình tròn
mp đi qua trục
Hình chữ nhật
$S = 2Rl$
mp song song trục
Hình chữ nhật
Hình trụ nội tiếp, ngoại tiếp khối lăng trụ đứng
2 đáy khối trụ là đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp đa giác 2 đáy của khối lăng trụ
KHỐI CẦU
Tập hợp các điểm M cách I một khoảng bằng R
Quay nửa đường tròn quanh đường kính
Công thức
$S = 4\pi R^2$
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Vị trí td
$d = d(I,(P))$
$d = R$
$d < R$
$d > R$
$(P) \cap (S) = (C)$
Tâm H trùng hình chiếu của I trên (P)
$r = \sqrt{R^2 - IH^2}$
S.ABC có SA vuông góc mặt đáy, tam giác ABC vuông tại B
Tâm là trung điểm SC
$R = \frac{SC}{2}$
Cạnh bên SA vuông góc với đáy có độ dài, bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là R_D
$R^2 = R_D^2 + \frac{SA^2}{4}$
Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau và có giao tuyến AB. R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAB và ABC
$R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}$
Chóp đỉnh S có các cạnh bên bằng nhau bằng ℓ
O là tâm của đa giác đáy
$R = \frac{\ell^2}{2SO}$
S.ABCD có đường cao SH
O là tâm đường tròn ngoại tiếp $ABCD$
$(SH - x)^2 + OH^2 = x^2 + R_D^2$
giải pt tìm x
$R^2 = x^2 + R_D^2$


PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG
DẠNG 1
$\vec{u} = \vec{a}$ cho trước
$A, B \in d$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$
$M \in d; d // d'$
$\vec{u}_d = \vec{u}_{d'}$
Thử lại
$M \in d; d \perp (P)$
$\vec{u}_d = \vec{n}_P$
d cắt Δ
$d \perp \Delta$
(P) qua M, $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_d}$
$d \cap (P) = A$
$d \cap \Delta = A$
$A \in \Delta$, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{u_\Delta}$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AM}$
$A \in d; d // (P)$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$
$B = d \cap \Delta \Rightarrow B \in \Delta$
$\vec{n}_P . \overrightarrow{AB} = 0$
Thử lại
d cắt d_1; d cắt d_2
$d \subset (P)$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$
$A = d_1 \cap (P); B = d_2 \cap (P)$
$d // \Delta$ hoặc $M \in d$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$
$A = d \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$
$B = d \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$
$d // \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\vec{u}_\Delta \Rightarrow A, B$
hoặc $\overline{MA} = k\overline{MB} \Rightarrow A, B$
Thử lại
$d \perp d_1; d \perp d_2$
$\vec{u}_d = \overrightarrow{AB}$
$A = d \cap d_1 \Rightarrow A \in d_1$
$B = d \cap d_2 \Rightarrow B \in d_2$
$\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow A, B$
DẠNG 2
Tìm được $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho
$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{u} \\ \vec{b} \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$
$A \in d; d \perp d_1; d \perp d_2$
$\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$
Thử lại
$M \in d; d \perp \Delta; d // (P)$
$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P]$
Thử lại
$d \subset (P)$
d cắt và vuông góc Δ
$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_P]$
$\Delta \cap (P) = A \Rightarrow A \in d$
$M \in d; d // (P); d // (Q)$
$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
Thử lại
$d = (P) \cap (Q)$
$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
$M \in d; d$ cắt d_1; d cắt d_2
$\vec{u}_d = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$
$\vec{n}_1$ là VTPT (A, d_1)
$\vec{n}_2$ là VTPT (A, d_2)
DẠNG 3
Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$
Dựa vào đề bài tìm quan hệ giữa a, b, c
Chọn a, b, c thỏa quan hệ
VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$
$M(x_0; y_0; z_0) \in d$
Dạng chính tắc
$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$
$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$
Dạng tham số
$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \; (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$



PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG
DẠNG TỔNG QUÁT
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$
$M(x_0;y_0;z_0)\in(P)$
DẠNG 1
$\vec{n}=\vec{a}$ cho trước
$M\in(P), d\perp(P)$
$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}$
$(P)//(Q)$
$M\in(P)$
$M\notin(Q)$
$\vec{n}_P=\vec{n}_Q$
(P) là mp trung trực của đoạn AB
$\vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}$
$I\in(P)$
DẠNG 3
Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$
Dựa vào đề bài tìm quan hệ giữa a, b, c
Chọn a, b, c thỏa quan hệ
$d\subset(P), ((P),(Q))=\varphi\neq 90°$
hoặc $(d,(P))=\varphi\neq 90°$
$\vec{n}_P.\vec{u}_d=0$
$\cos\varphi=|\cos(\vec{n}_Q,\vec{n}_P)|$
hoặc $\sin\varphi=|\cos(\vec{u}_d,\vec{n}_P)|$
DẠNG 2
Tìm được $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho
$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{a}\\ \vec{n}\perp\vec{b}\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$
$M\in(P)$
$(P)\perp(Q);(P)\perp(R)$
$\overrightarrow{n_P}=[\overrightarrow{n_Q},\overrightarrow{n_R}]$
$A\in(P), d\subset(P)$
$\vec{n}_P=[\vec{u}_d,\overrightarrow{AM}]$
$d\subset(P),(P)//d'$
$d\cap d'=I$
$d,d'\subset(P)$
$\vec{n}_P=[\vec{u}_d,\vec{u}_{d'}]$
$A,B,C\in(P)$
$\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$
$M\in(P)$
$(P)\perp(Q),(P)//\Delta$
$\vec{n}_P=[\vec{u}_\Delta,\vec{n}_P]$
$d,d'\subset(P), d//d'$
$\vec{n}_P=[\vec{u}_d,\overrightarrow{M_1M_2}]$
$M_1\in d, M_2\in d'$
$A,B\subset(P),(P)\perp(Q)$
$\vec{n}_{(P)}=[\overrightarrow{AB},\vec{n}_{(Q)}]$

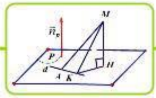
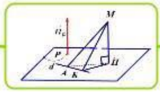
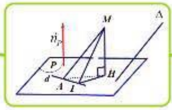
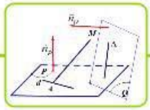

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU
Tâm I (a;b;c)
Bán kính R
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
Tâm I (a;b;c)
Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
$a^2+b^2+c^2-d>0$
Mặt cầu có AB là đường kính
Tâm là trung điểm AB
$R=\frac{AB}{2}$
Mặt cầu tâm I đi qua điểm A
$R=IA$
Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P)
$R=d(I,(P))$
Mặt cầu tâm I tiếp xúc với d
$R=d(I,d)$
Tâm I thuộc (P) và qua A,B,C
$I\in(P_1);(P_2);(P_3)$
$(P_1),(P_2)$ là MP trung trực của AB,AC
Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D
Gọi $I(a;b;c)$ là tâm
$IA=IB=IC=ID$
Thay tọa độ A, B, C, D vào pt
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Giải hệ phương trình
Mặt cầu tâm I cắt d tại 2 điểm A,B sao cho AB = x
$R^2=\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2+x^2$
Mặt cầu tâm I cắt (P) theo 1 đường tròn bán kính r
$R^2=\left[d\left(I,(P)\right)\right]^2+r^2$



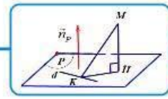
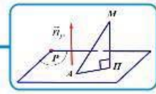
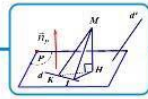
XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI
ĐT VÀ MP
$(P): Ax+By+Cz+D=0$
$d:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$
Giải pt
$A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$
vô nghiệm
song song
1 nghiệm
cắt nhau
vô số nghiệm
ĐT nằm trong MP
Tính $\vec{u}.\vec{n}$
$\vec{u}.\vec{n}=0$
$M\in d\Rightarrow M\in(P)$
song song
$M\in d\Rightarrow M\notin(P)$
ĐT nằm trong MP
$\vec{u}.\vec{n}\neq 0$
cắt nhau
HAI ĐƯỜNG THẲNG
$d_1:\begin{cases}x=x_1+a_1t\\ y=y_1+b_1t\,(t\in\mathbb{R})\\ z=z_1+c_1t\end{cases}$
$d_2:\begin{cases}x=x_2+a_2t'\\ y=y_2+b_2t'\,(t'\in\mathbb{R})\\ z=z_2+c_2t'\end{cases}$
$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=\vec{0}$
$M_1\in d_1\Rightarrow M_1\notin d_2$
song song
$M_1\in d_1\Rightarrow M_1\in d_2$
trùng nhau
$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}$
Giải hệ pt
1
$\begin{cases}x_1+a_1t=x_2+a_2t\\ y_1+b_1t=y_2+b_2t\\ z_1+c_1t=z_2+c_2t\end{cases}$
có đúng 1 nghiệm
Cắt nhau
vô nghiệm
chéo nhau
2
$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\overrightarrow{M_1M_2}=0$
Cắt nhau
$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\overrightarrow{M_1M_2}\neq 0$
chéo nhau
HAI MẶT PHẲNG
$(P): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$
$(Q): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$
$\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1=kD_2\end{cases}$
trùng nhau
$\begin{cases}\vec{n}_1=k\vec{n}_2\\ D_1\neq kD_2\end{cases}$
song song
$\vec{n}_1\neq k\vec{n}_2$
cắt nhau
vuông góc
$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
MP VÀ MẶT CẦU
Cắt nhau
$d(I,(P))<R$
Mp nằm ngoài mặt cầu
$d(I,(P))>R$
Tiếp xúc
$d(I,(P))=R$

CỰC TRỊ

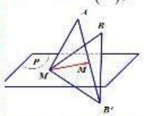
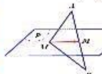
TÌM ĐƯỜNG THẲNG (d)

- Cho A, (P) và (Q); $d \subset (P)$, $d // (Q)$ → $d(A,d)$ đạt min $\Leftrightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
- Cho $d \subset (P), A \in d$; $M \notin d, MA \not\perp (P)$; $d(M,d)_{\min}$ →  → $\vec{u}_d = [[\vec{n}_P, \overrightarrow{AM}], \vec{n}_P]$
- Cho $d \subset (P), A \in d$; $M \notin d, MA \not\perp (P)$; $d(M,d)_{\max}$ →  → $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \overrightarrow{AM}]$
- Cho $\Delta \not\perp (P)$, Δ cắt (P); $A = (P) \cap d; d \subset (P)$; $(\Delta, d) = \varphi_{\min}$ →  → $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, [\vec{n}_P, \vec{u}_\Delta]]$
- Cho $M = (P) \cap \Delta$, $d \subset (P)$; $d \cap (P) = A\,(A \not\equiv M)$; $d(d,\Delta)_{\max}$ →  → $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, [[\vec{u}_\Delta, \overrightarrow{AB}], \vec{u}_\Delta]]$ với $B \in \Delta$

TÌM MẶT PHẲNG (P)

- Cho d và $M \notin d$, $d \subset (P)$; $d(M,(P))_{max}$ →  → $\vec{n}_P = \overrightarrow{MK}, K = \text{hc}\, M/d$; $\vec{n}_P = [[\vec{u}_d, \overrightarrow{AM}], \vec{u}_d], A \in d$
- Cho A, M $(M \notin (P))$; $d(M,(P))_{\max}$ hoặc $AM_{\min}$ →  → $\vec{n}_P = \overrightarrow{AM}$
- Cho $d \subset (P), d' \not\parallel d$; $(d',(P)) = \varphi_{\max}$ →  → $\vec{n}_P = [[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}], \vec{u}_d]$

TÌM ĐIỂM M

- Cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$
  - n số $k_1, k_2, ..., k_n$, $k_1 + k_2 + ... + k_n = k \neq 0$
  - M thuộc đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P)
  - $S = \left|k_1\overrightarrow{MA_1} + k_2\overrightarrow{MA_2} + ... + k_n\overrightarrow{MA_n}\right|, S_{\min} = ?$
  - $T = \left(k_1MA_1^2 + k_2MA_2^2 + ... + k_nMA_n^2\right), T_{\max\,(\min)} = ?$
  - → $M = \text{hc}I/d$ hoặc $M = \text{hc}I/(P)$; Với $k_1\overrightarrow{IA_1} + k_2\overrightarrow{IA_2} + ... + k_n\overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$; Nếu $k > 0$ thì $T_{\min}$, $k < 0$ thì $T_{\max}$
- Cho ĐT d và $A, B \notin d$; $M \in d : (MA + MB)_{\min} = ?$
  - $d \perp AB$ → $M = \text{hc}A/d$
  - $d \not\perp AB$ →
    1. Tọa độ M theo tham số $t \in \mathbb{R}$
    2. Tính biểu thức $MA + MB$ theo t
    3. Dùng PP hàm số hoặc BĐT tìm t
    4. Suy ra tọa độ M
- Cho MP (P) và $A, B \notin (P)$; $M \in (P) : (MA + MB)_{\min} = ?$
  - A, B cùng phía với (P) → $M = AB' \cap (P), B' = \text{đx}B/(P)$ 
  - A, B khác phía với (P) → $M = AB \cap (P)$ 

TÍCH HỮU HƯỚNG GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

- **TÍCH HỮU HƯỚNG**
  - $\vec{u} = (a;b;c)$
    $\vec{v} = (a';b';c')$
    $\vec{u} \wedge \vec{v} = \left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$
  - **Tính chất**
    - $\left[\vec{u},\vec{v}\right] \perp \vec{u},\ \left[\vec{u},\vec{v}\right] \perp \vec{v}$
    - $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)$
    - $\vec{u},\ \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right] = 0$
  - **Ứng dụng**
    - $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 0$
    - $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
    - Hình bình hành ABCD: $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
    - Tứ diện ABCD: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD}\right|$
- **KHOẢNG CÁCH**
  - Điểm tới đường thẳng: $d(M_0,\Delta_1) = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MM_0}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$
  - 2 đường thẳng chéo nhau: $d(\Delta_1,\Delta_2) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{MM_0}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$
  - Điểm tới mặt phẳng: $d(M,(P)) = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
- **GÓC**
  - Góc giữa hai vectơ: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
  - Giữa 2 mặt phẳng: $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right|$
  - Giữa 2 đường thẳng: $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right)\right|$
  - Giữa đường thẳng và mặt phẳng: $\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{u};\vec{n}\right)\right|$